Complexity

上課補充 by GT
Credit by double, nella17

Sprout

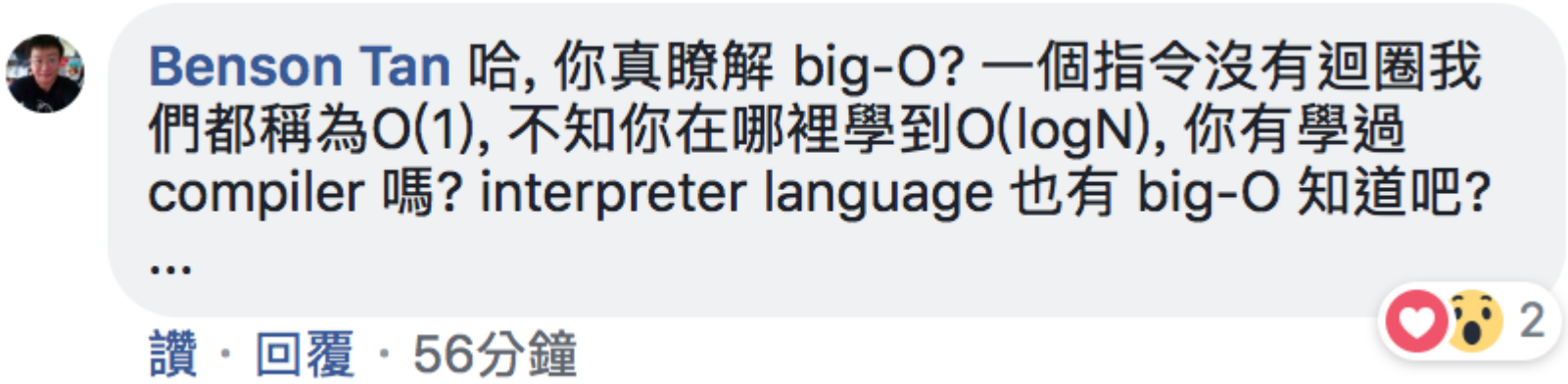
- 影片看了嗎
- Q&A

今天要學的東西

- 今天的課以理論為主，不太會寫到題目
- 但是對於複雜度的知識絕對是寫程式最重要的一環
- 大家都怎麼算複雜度？

今天要學的東西

- 今天的課以理論為主，不太會寫到題目
- 但是對於複雜度的知識絕對是寫程式最重要的一環
- 大家都怎麼算複雜度？



今天要學的東西

- 今天的課以理論為主，不太會寫到題目
- 但是對於複雜度的知識絕對是寫程式最重要的一環
- 大家都怎麼算複雜度？
- 「沒有迴圈就是 O(1)，一層迴圈就是 O(n)，兩層就 O(n^2)」
- By Foxconn Specialist

今天要學的東西

- 今天的課以理論為主，不太會寫到題目
- 但是對於複雜度的知識絕對是寫程式最重要的一環
- 大家都怎麼算複雜度？
- 「沒有迴圈就是 $O(1)$，一層迴圈就是 $O(n)$，兩層就 $O(n^2)$」
- By Foxconn Specialist
- 真的是如此嗎？

複雜度的正確算法

- 數迴圈有幾層的優缺點：
- 優點：大部分的程式我們大概都可以這樣算啦
- 缺點：
- 1.有些操作可能不是 O(1)
- 2.無法計算遞迴的時間複雜度
- 3.可能會錯估均攤複雜度

複雜度的正確算法

- 首先，先來討論複雜度的正確算法
- 正式的數學定義手寫作業有，也會讓大家證一些東西
- 不過在 99% 的時候，複雜度都這樣算就好了：
- 計算總共需要的操作數，留下量級最大那一項，常數去掉
- ex: $O(3n^2\log n + 2n^2 + 4n + \log n) = O(n^2\log n)$

案例 1

- 計算 a 的 n 次方模 10^9+7：
- Foxconn specialist:
- return a**n % 1000000007
- 沒有迴圈，所以 O(1)
- 實測時間

案例 1

```
import time
time1=time.time()
a=880301
n=26
mod=1e9+7
x=a**n
time2=time.time()
n=1000026
y=a**n
time3=time.time()
print(time2-time1)
print(time3-time2)
```

案例 1

```
import time
time1=time.time()
a=880301
n=26
mod=1e9+7
x=a**n
time2=time.time()
n=1000026
y=a**n
time3=time.time()
print(time2-time1)
print(time3-time2)
```

```
2.8610229492187 5e-06
4.153032302856445
```

案例 1

- 當計算 pow(a, n) 時，內建的 pow 函數所需要的時間隨著 a 和 n 有所影響。

- 實際上 C/C++ 與 python 的 pow 完全不一樣（C/C++ 沒有大數考量），但也不能視為一般的常數操作。

案例 2

- 估算遞迴的複雜度
-
```
gcd(p, q):
    if q = 0:
        return p
    else:
        return gcd(q, p % q)
```
- 這種自己呼叫自己的函式，沒有迴圈可以數，複雜度要怎麼算？

案例 2

- 估算遞迴的複雜度
-
```
fib(n):
    if n = 1 or 2:
        return 1
    else:
        return fib(n - 1) + fib(n - 2)
```
- 這種自己呼叫自己的函式，沒有迴圈可以數，複雜度要怎麼算？

案例 3

- 模擬一個 stack，有 3 種操作
- 1. push(x)
- 2. top()
- 3. pop(k)：連續 pop 掉 k 個物品，其中 k <= stack 的大小
- 每個操作的時間複雜度是多少？
- 執行 n 次操作的總複雜度是多少？

案例 3

- 模擬一個 stack，有 3 種操作
- 1. push(x)
- 2. top()
- 3. pop(k)：連續 pop 掉 k 個物品，其中 k <= stack 的大小
- 每個操作的時間複雜度是多少？ O(1),O(1),O(n)
- 執行 n 次操作的總複雜度是多少？ O(n*n)=O(n^2)?

案例 3

- 模擬一個stack，有3種操作
- 1. push(x)
- 2. top()
- 3. pop(k)：連續 pop 掉 k 個物品，其中 k <= stack 的大小
- 每個操作的時間複雜度是多少？ O(1),O(1),O(n)
- 執行 n 次操作的總複雜度是多少？ O(n*n)=O(n^2)?
- pop 掉的物品數 <= push 進的物品數 <= n
- 均攤複雜度 O(n)

案例 4

- 計算對於所有 $1 \le i \le n$, i 有幾個因數
- 時間複雜度？

```
vector<int> f(int n) {
  vector<int> cnt(n + 1);
  for (int i = 1; i <= n; i++)
    for (int j = 1; j <= n; j += i)
      cnt[j]++;
  return cnt;
}
```

案例 4

- 計算對於所有 1 ≤ i ≤ n, i 有幾個因數
- 時間複雜度？O(N log N)

```
vector<int> f(int n) {
  vector<int> cnt(n + 1);
  for (int i = 1; i <= n; i++)
    for (int j = 1; j <= n; j += i)
      cnt[j]++;
  return cnt;
}
```

案例 4

- 計算對於所有 1 ≤ i ≤ n, i 有幾個因數
- 時間複雜度？O(N log N)

$$\frac{N}{1}+\frac{N}{2}+\cdots+\frac{N}{N}=N\times(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{N})\approx N\int_1^n\frac{1}{k}dk=N\log N$$

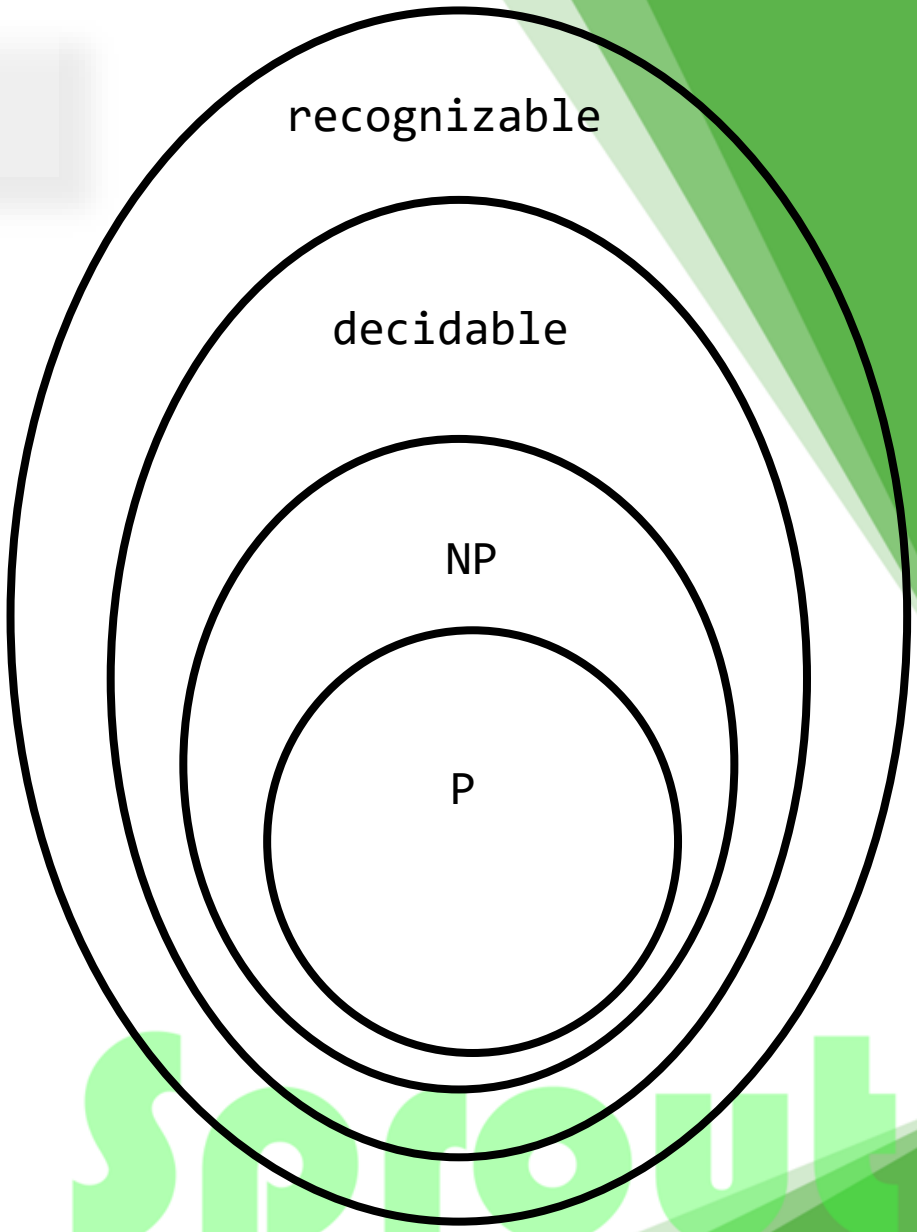
```
vector<int> f(int n) {
  vector<int> cnt(n + 1);
  for (int i = 1; i <= n; i++)
    for (int j = 1; j <= n; j += i)
      cnt[j]++;
  return cnt;
}
```

複雜度的重要性

- 在競賽程式中，複雜度計算通常是為了讓我們判斷這個演算法寫了會不會 TLE
- 我們可以假設機器每秒大概跑 10^8 左右的操作
- 這件事也告訴我們，除非複雜度真的在 10^8 左右，否則演算法的常數不是很重要，如果複雜度相同挑最好寫的方式寫就好

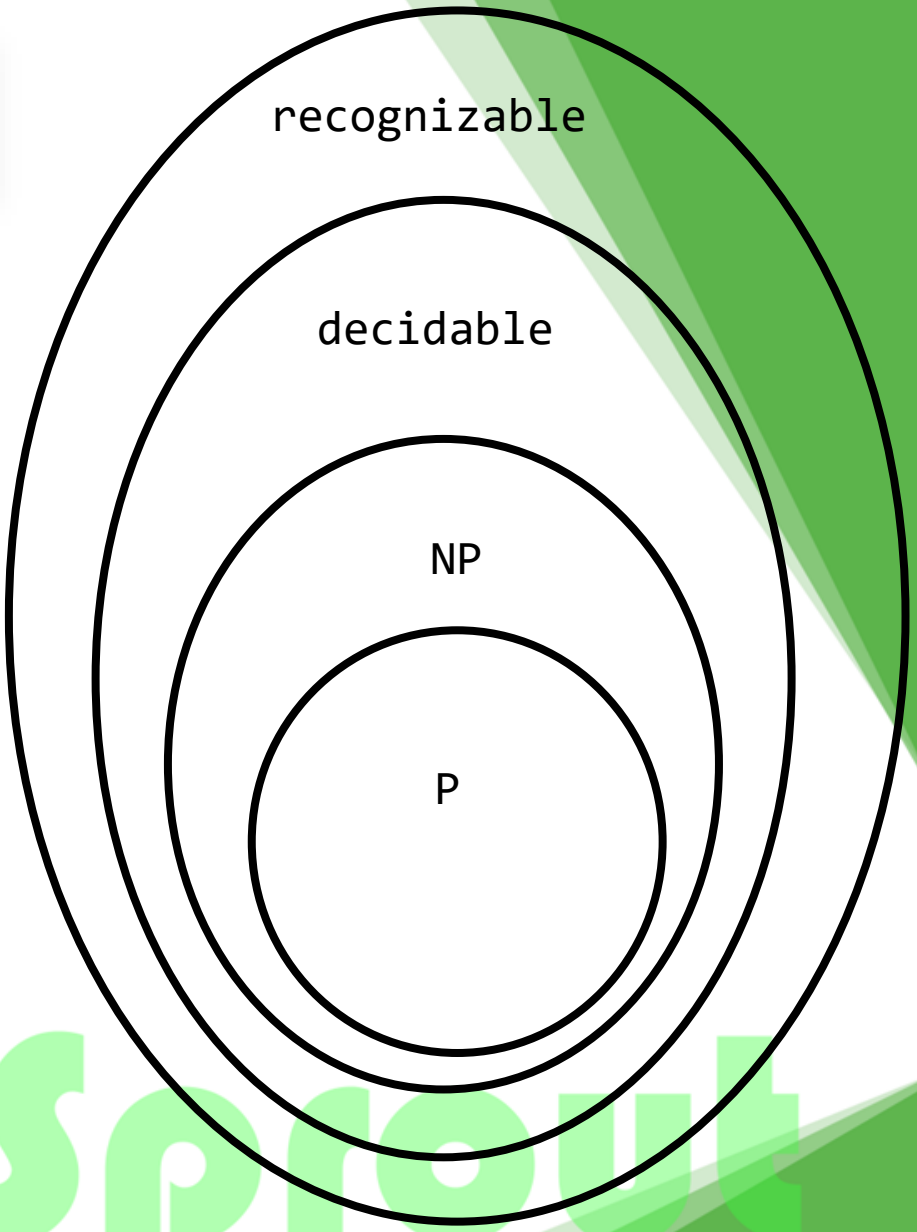
計算理論中的複雜度類

- recognizable
- decidable
- nondeterministic polynomial
- polynomial



計算理論中的複雜度類

- recognizable
  對於答案是 yes 的輸入，能輸出 yes
  對於答案是 no 的輸入，不一定跑的完
- decidable
- nondeterministic polynomial
- polynomial



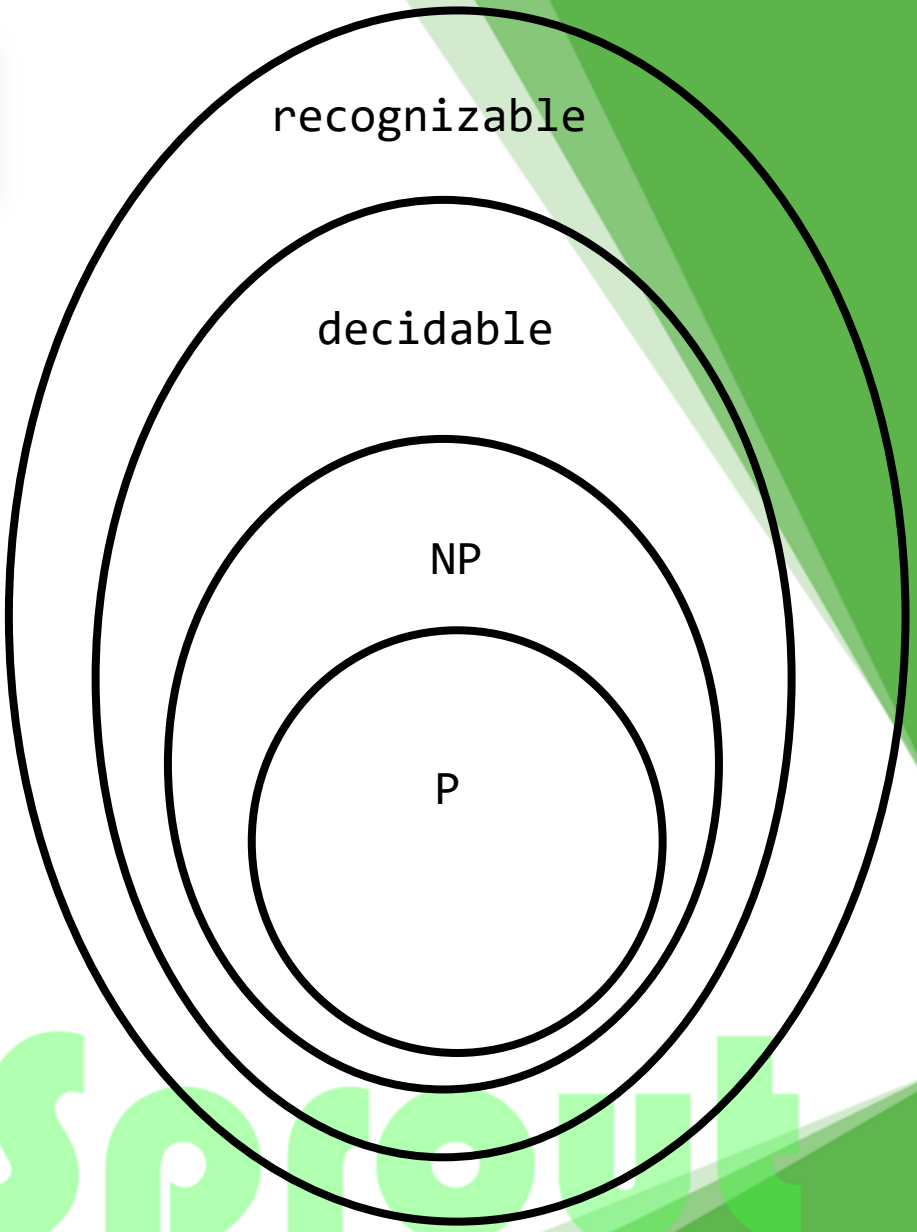
計算理論中的複雜度類

- recognizable
- decidable

  對於答案是 yes 的，能輸出 yes
  對於答案是 no 的，能輸出 no

  此複雜度類的問題才有「演算法」
- nondeterministic polynomial

- polynomial

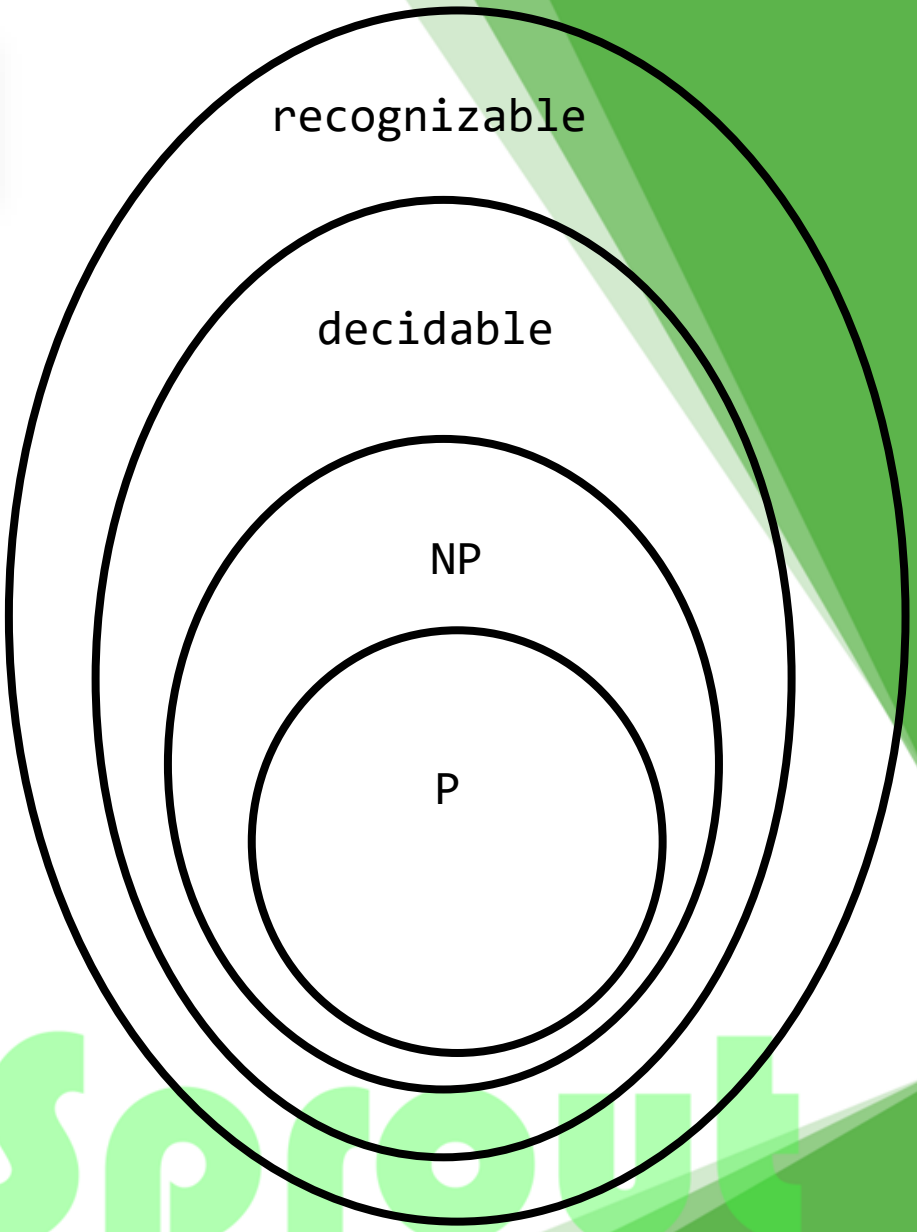


計算理論中的複雜度類

- recognizable
- decidable
- nondeterministic polynomial

  常常聽到的 NP 問題，並不是指非多項式時間（decidable 裡面很多非多項式但也不是 NP 的問題）

  是指如果我們多給程式一個提示，就有辦法在多項式時間內得知答案是 yes
- polynomial



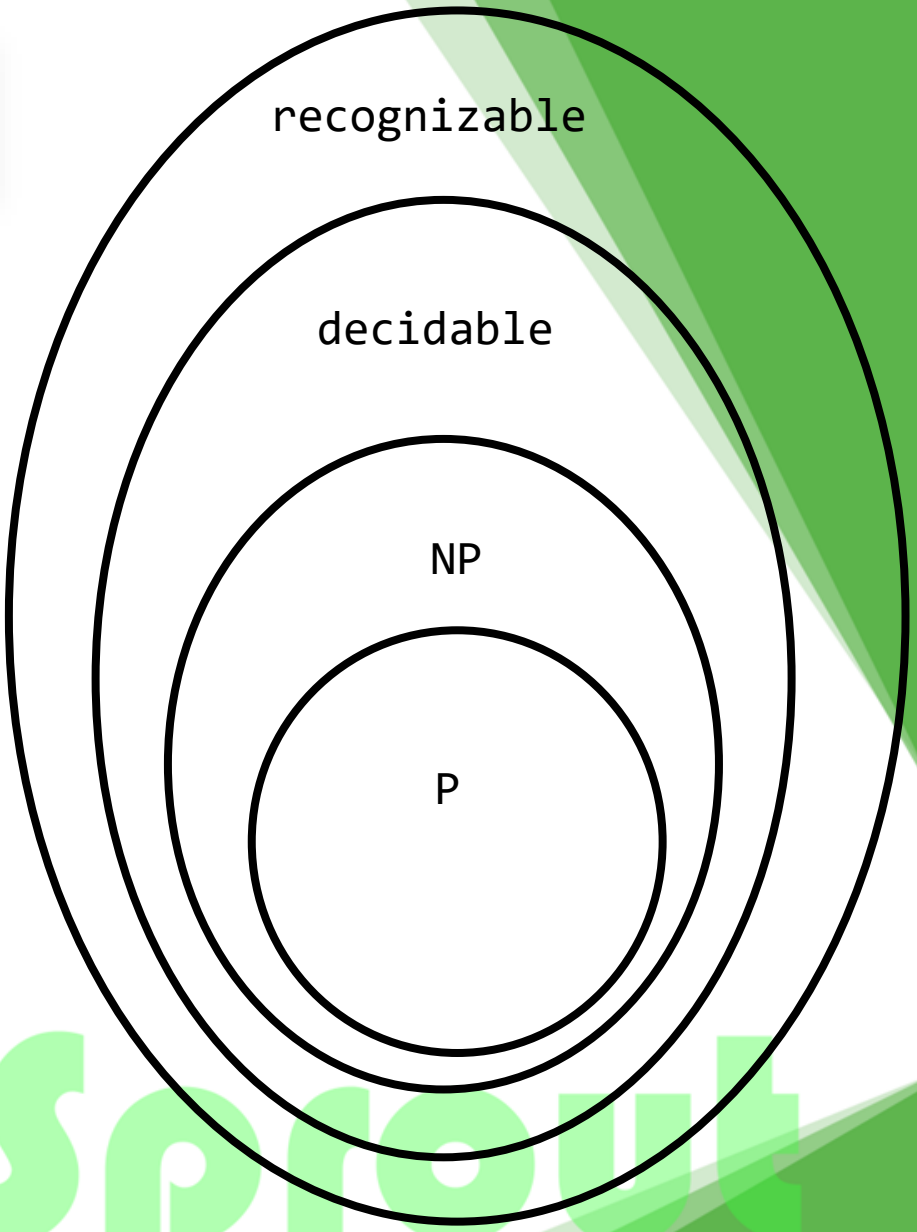
計算理論中的複雜度類

- recognizable
- decidable
- nondeterministic polynomial

  e.g. Subset Sum

  給定 N 個數字(a_1, a_2, …)和 x

  問是否有子集合等於 x
- polynomial

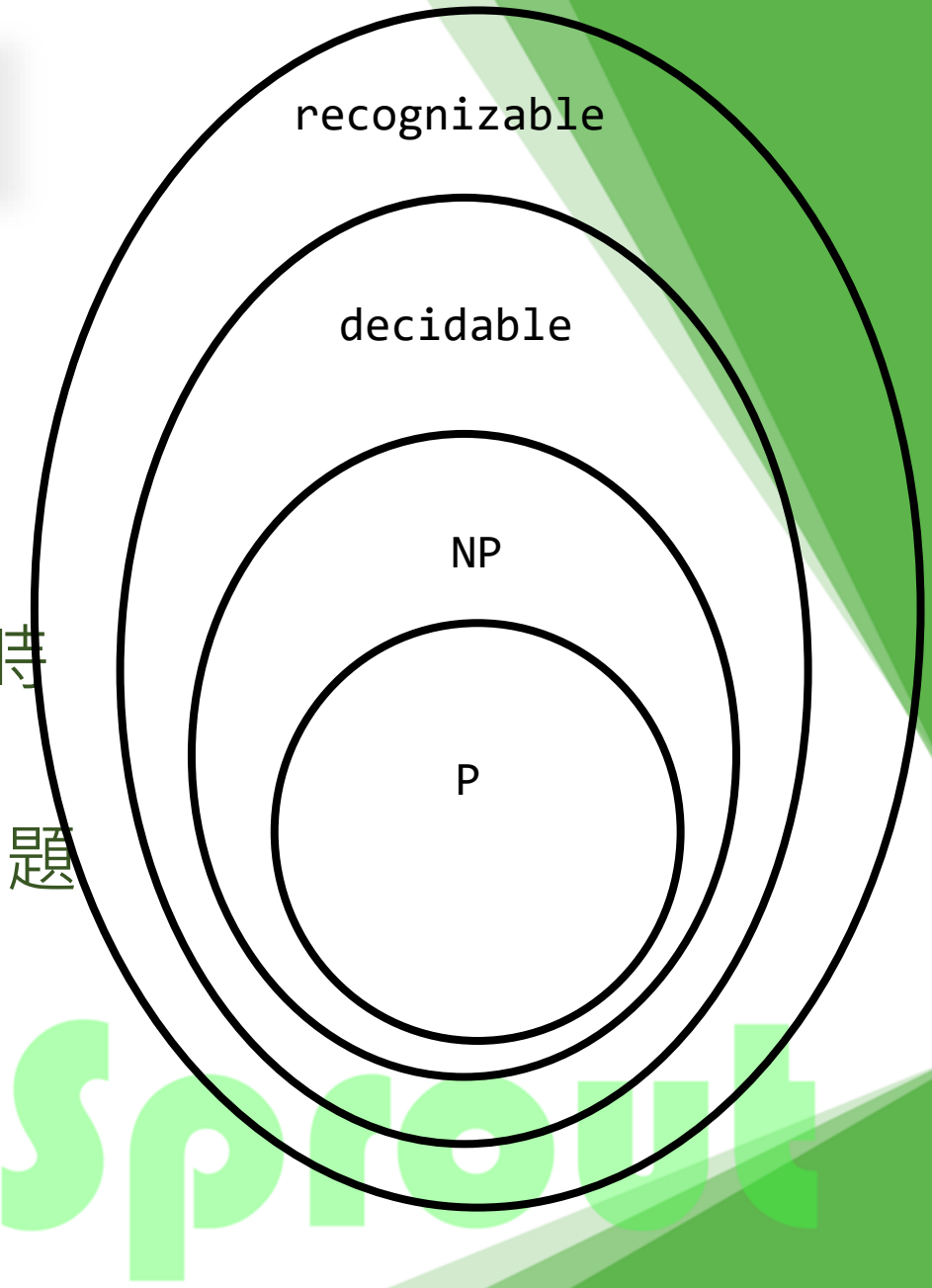


計算理論中的複雜度類

- recognizable
- decidable
- nondeterministic polynomial
- polynomial

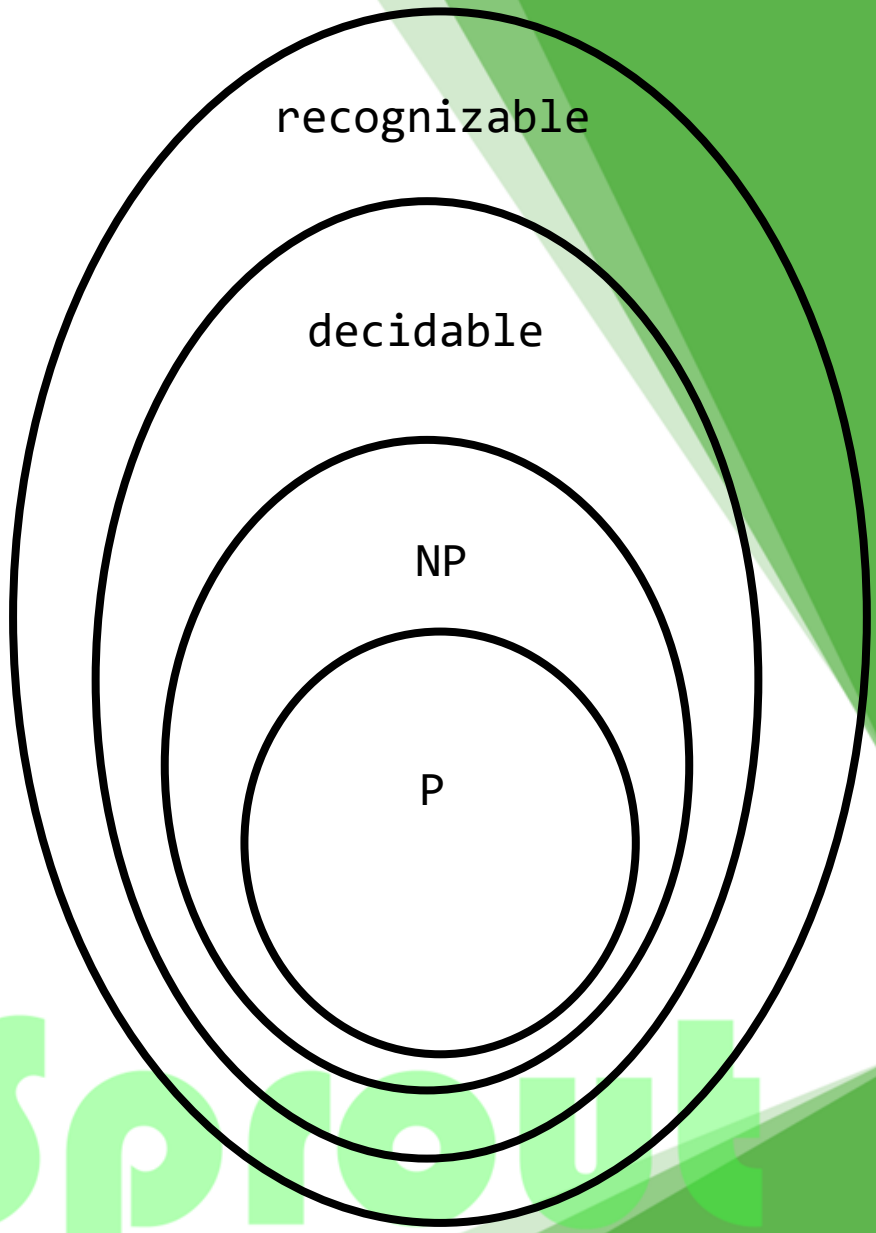
這個就很直觀了，是指能夠在多項式時間內判斷答案是 yes 還是 no

一般我們能有效率解決的問題都是 P 問題



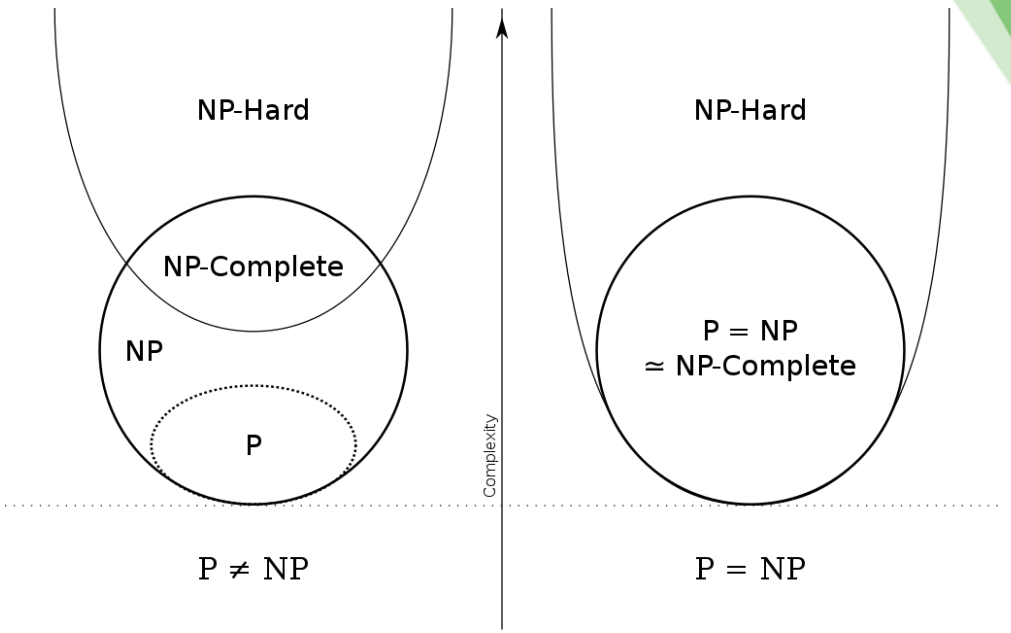
P 與 NP

- 所有 P 問題都是 NP 問題
- P 和 NP 之間的東西？



P 與 NP

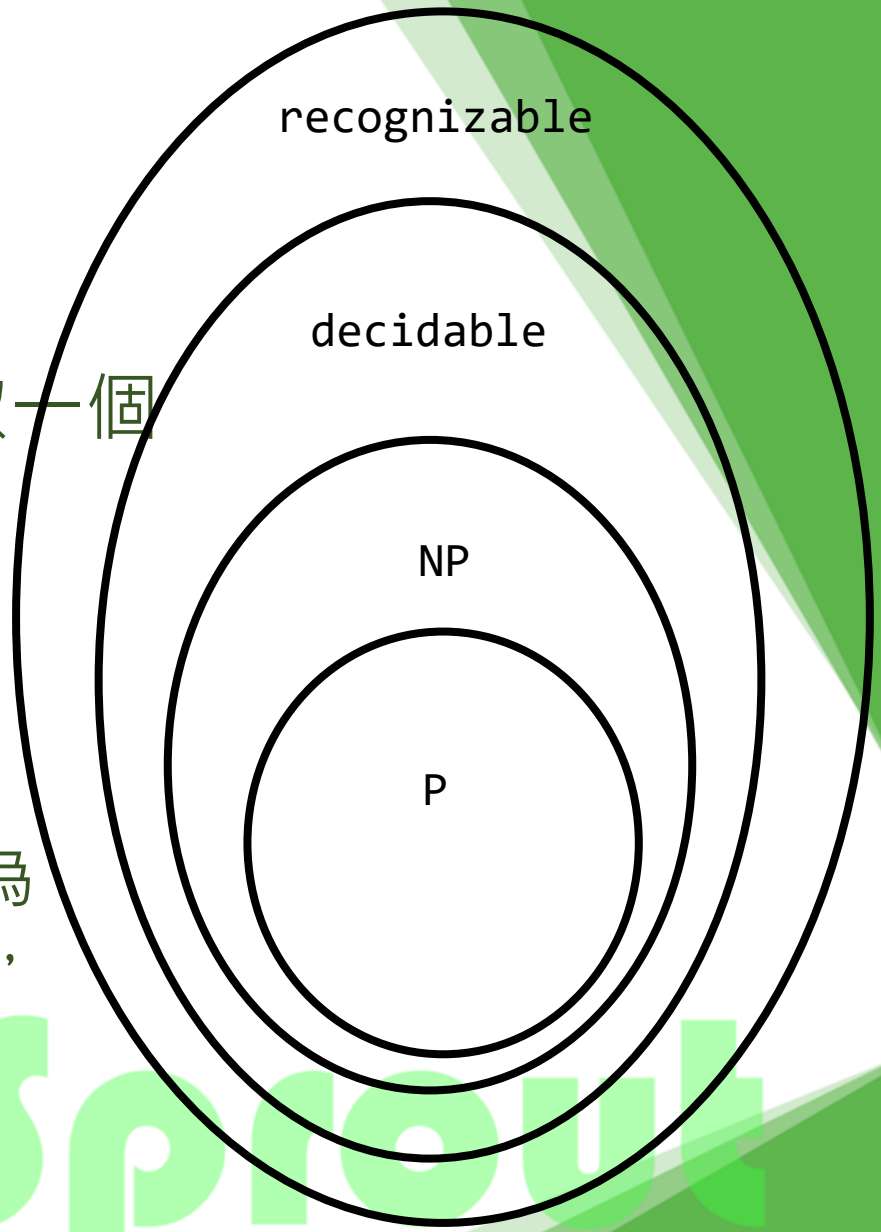
- 所有 P 問題都是 NP 問題
- P 和 NP 之間的東西？
- NP-Complete
  - NP 中最難的問題
- P ≠ NP
  - NP-Complete ⊄ P
- P = NP
  - ...?



Credit: https://en.wikipedia.org/wiki/P_versus_NP_problem#/media/File:P_np_np-complete_np-hard.svg

P 與 NP

- 所有 P 問題都是 NP 問題
- 我們可能會很想幫 NP 和 P 之間的區域取一個名字，這樣當我們發現一個問題很難，我可就可以試圖去證明它屬於那個區域
- 但目前我們不確定那個區域是否存在
- 也就是有可能 P=NP
- 於是我們定義 NP 問題裡最難的那些問題為 NP-Complete，如果有一天確定了 P!=NP，那那些 NPC 的問題肯定不屬於 P



多項式時間複雜度

- 剛剛 P 和 NP 都有提到的多項式時間，大家都知道多項式要有一個變數，那麼題目裡的變數有時候是指個數，有時候是數字範圍，有時候甚至超過一個變數，多項式時間是指哪個變數的多項式呢
- A: 輸入總長度（字元數）的多項式。更明確地說，假設輸入的變數是 N，那們要分析的是 len(str(N)) 約等於 log(N)。

平常我們都用「題目變數」來表示複雜度，通常是為了方便好懂，但複雜度理論的複雜度基準都是 input size 才對。

多項式時間複雜度

- 因此當你的複雜度裡面有代表數字大小而非個數的變數時，其實不能算是多項式演算法，因為長度為 N 的輸入可以表示出約 10^N 大小的數字。

- 這種看似是多項式時間的演算法，我們會稱其為「偽多項式時間」演算法。在題目有限制數字範圍不會太大時依然很有效率。

多項式時間複雜度

- 印出 1+2+...+n：
  - A. 使用公式解
  - B. 使用暴力法
- 上述哪些是多項式時間演算法，哪些不是呢？

多項式時間複雜度

- 印出 1+2+...+n：
  - A. 使用公式解
  - B. 使用暴力法
- 上述多項式時間演算法為何？
  - A.因為公式解n*(n-1)/2，基於複雜度理論使得 n 趨近於無限大，乘法必須帶有快速傅立葉變換(不可忽視)。，換成input size，s = log(n)作為基準的話，O(log n loglog n) = O(s log s)。
  - B. 換成 input size，s = log(n)作為基準的話，O(n) = O(10^s)。

P 問題的重要性

- 當我們在歸類一個問題為 P 問題時，等於不在乎他的複雜度是 $O(N^2)$ 還是 $O(N^3)$ 之類的，只要是多項式時間就好。
- 這是因為多項式次數的差別可以透過運算速度隨著科技進步的提升，或是更多更高級的運算資源來突破。但是非多項式時間的問題我們基本上就是永遠沒辦法有效率的解決。

P 問題的重要性

- 當我們在歸類一個問題為 P 問題時，等於不在乎他的複雜度是 $O(N^2)$ 還是 $O(N^3)$ 之類的，只要是多項式時間就好。
- 這是因為多項式次數的差別可以透過運算速度隨著科技進步的提升，或是更多更高級的運算資源來突破。但是非多項式時間的問題我們基本上就是永遠沒辦法有效率的解決。
- 存在無法多項式時間解決的問題並不是壞事，這可以製造 computational gap
  - 可以用在密碼學中
- 如果 P=NP 會發生什麼事？

P=?NP

- If P = NP, then the world would be a profoundly different place than we usually assume it to be. There would be no special value in "creative leaps," no fundamental gap between solving a problem and recognizing the solution once it's found. Everyone who could appreciate a symphony would be Mozart; everyone who could follow a step-by-step argument would be Gauss; everyone who could recognize a good investment strategy would be Warren Buffett.

by Scott Aaronson